ΘΕΩΡΗΜΑ (BOLZANO-WEIRSTRASS).
Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Εφαρμογή
ΝΔΟ οι ακολουθίες

$a_\nu = \frac{\nu-7}{2\nu+1}, \nu \in \mathbb{N}$ και $\beta_\nu = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{\nu^2}$

Έχουν συγκλίνουσες υπακολουθίες

<u>ΛΥΣΗ</u>

$$a_{\nu+1} - a_\nu = \frac{\nu+1-7}{2\nu+2+1} - \frac{\nu-7}{2\nu+1} = \frac{15}{(2\nu+3)\cdot(2\nu+1)} > 0$$

Άρα, η $a_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ $\uparrow$ και άρα, $a_\nu > a_1$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$

$a_1 = -2$, επομένως $a_\nu > -2$

Αλλά, $\frac{\nu-7}{2\nu+1} < 1$ $\left(\Leftrightarrow \nu - 7 < 2\nu + 1 \Rightarrow \nu > -8 \text{ ισχύει} \right)$

Άρα, $1 > a_\nu > -2$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$ όποτε η a_ν φραγμένη.
Άρα, ισχύει το Θ. B-W.
Επίσης, για τη $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}$

$$\beta_{\nu+1} - \beta_\nu = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{(\nu+1)^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{\nu^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{(\nu+1)^2} > 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$$ άρα η $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ $\uparrow$

Προφανές ότι ο όρος $\beta_1 = 1$ είναι κάτω φράγμα (αλλά και το 0 επίσης)
Ενώ,

$$\beta_\nu = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{\nu^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{(\nu-1)\nu} =$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{\nu-1} - \frac{1}{\nu}\right) = 2 - \frac{1}{\nu} < 2, \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Επομένως, η $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ φραγμένη
Άρα ισχύει το Θ. B-W